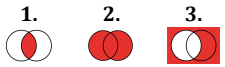
ZF Statistik

Elementarereigniss (ω)... mögliche Ergebnisse {1}
Grundraum (Ω)... alle mögliche Ergebnisse {1,2..6}
Ereigniss (A)... eine Teilmenge vom Grundraum {1,3,6}
Leere Menge (ϕ)... kein Ergebniss { }

Operationen der Mengenlehre: 1. 2. 3.



1. **Durchschnitt:** $A \cap B$ "und"
2. **Vereinigung:** $A \cup B$ "oder"
3. **Komplement:** A^c "nicht"

Bsp: $A=\{1,3,5\}$, $B=\{1,2,3\}$, $A \cap B=\{1,3\}$, $A \cup B=\{1,2,3,5\}$

Axiome von Wahrscheinlichkeitsrechnung:

1. $P(A) \geq 0$
W'keiten nie negativ ($P(A) = 0$ ist möglich!)

2. $P(\Omega) = 1$
W'keit, dass einen von allen möglichen Ergebnisse austritt ist 1

3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Bsp: $A=\{1,3,5\}$, $B=\{1,2,3\}$, $A \cap B=\{1,3\}$,
$A \cup B = A + B - A \cap B = \{1,3,5\} + \{1,2,3\} - \{1,3\} = \{1,2,3,5\}$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$

weitere wichtige Regel:

4. $P(A^c) = 1 - P(A) = P(\Omega) - P(A)$

5. $P(A) = \sum_{\omega \epsilon A} P(\{\omega\})$
Bsp: $P(A) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\})$

6. Falls jedes ω die gleiche W'keit hat: → $P(E) = \frac{g}{m}$
g... Anzahl ω im Ereigniss E
m... Anzahl ω im Grundraum Ω

Odds (A):

gibt an, wieviel mal wahrscheinlicher das Eintreten von A als das Eintreten von A^c ("nicht A") ist.

$$odds\ (A) = \frac{P(A)}{1-P(A)} \quad \text{bzw.} \quad \text{odds}\ (A|B=1) = \frac{P(A|B=1)}{1-P(A|B=1)}$$

Bedingte W'keit:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(A|B) \neq P(B|A)\ !$$

Gesetzt der totalen W'keiten:

$$P(A) = \sum P(A \cap B_i) = \sum P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

Satz von Bayes:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{\sum P(A \cap B_i)} = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{\sum P(A|B_i) \cdot P(B_i)}$$

Unabhängigkeit:

Falls kein kausaler Zusammenhang zwischen A und B:

1. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Verallgemeinerung: $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots \cdot P(A_n)$

2. $P(A|B) = P(A)$

Diskrete Verteilungen:

Bernoulli(π)-Verteilung:

Beschreibt das Eintreffen oder Nicht-Eintreffen eines bestimmten Ereignisses.
(Z.Bsp: Das Ergebnis "Kopf" bei Münze. Falls Münze fair → $\pi = 0{,}5$)

Binomial(n, π)-Verteilung:

Beschreibt Zufallsvariable "Anzahl Erfolge/Misserfolge" bei n **unabhängigen** Versuchen.

Konvention: $X \sim Bin(n, \pi)$

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot \pi^x \cdot (1-\pi)^{n-x} \qquad , x \epsilon \{0 - n\}$$

$$\mathcal{E}(x) = n \cdot \pi \qquad Var(x) = n \cdot \pi \cdot (1-\pi)$$

Bem: Falls Reihenfolge wichtig → $\binom{n}{x} = 1$ "ersten 2 Rot und letzte blau"

Poissonverteilung:

Falls eine Zufallsvariable **nicht** einen **beschränkten Werteberiech** hat.

Konvention: $X \sim Pois(\lambda)$

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \qquad , \ \mathcal{E}(x) = Var(x) = \lambda$$

Bem:

1. Summen von Poisson-verteilten Zufallsvariablen:
Wenn $X \sim Pois(\lambda_x)$ und $Y \sim Pois(\lambda_y)$ **unabhängig** sind, dann ist $X + Y \sim Pois(\lambda_x + \lambda_y)$

2. Posson-Approximation der Binomial-Verteilung:
Falls n gross und π klein mit $\lambda = n \cdot \pi$:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x} \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

Kennzahlen einer Verteilung:

Erwartungswert $\mathcal{E}(X)$:
Beschreibt die mittlere Lage der Verteilung (Mittelwert bzw. Durchschnitt)

$$\mathcal{E}(X) = \sum_{x \epsilon W_X} x \cdot P(X = x) \qquad , W_X = \text{Wertebereich von } X$$

Standartabweichung $\sigma(X)$:
Beschreibt die Streuung der Verteilung: (**Varianz** = quadrat der Stand'abw)

$$Var(x) = \sum_{x \epsilon W_X} \big(x - \varepsilon(x)\big)^2 \cdot P(X = x)$$
$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Punktschätzung:

Grundfragestellung:
Welcher ist der zu den Beobachtungen plausibelste Parameterwert?

1. Momentenmethode:

$$\hat{\pi} = \frac{x}{n}$$

n... beobachtete Anzahl Gewinne
x... Anzahl unabhängiger Versuche

2. Maximum Likelhood

Vorgehen:
1. Gleichung aufstellen $P(A \cap B \cap \ldots) = P(A) \cdot P(B) \cdot \ldots$
Bsp: $P(A \cap B \cap \ldots) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_2}}{x_2!} \cdot \ldots$
2. Gleichung logarithmieren (falls Rechnung vereinfacht):
Bsp: $\log\big(P(A \cap B \cap \ldots)\big) = \log\left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_2}}{x_2!} \cdot \ldots\right)$
→ log–Regeln anwenden:
   1. $\log(a \cdot b) = \log(a) \cdot \log(b)$
   2. $\log(a^b) = b \cdot \log(a)$
3. Gleichung ableiten, gleich Null setzten und nach unbekannten Parameter auflösen.

Statistischen Test (diskret):

Vorgehen (Binomialvert.):

1. Modell:
$X \sim Bin(n, \pi)$

2. Nullhypothese H_0 und Alternativhypothese H_A :
$H_0: \pi = 0 \quad H_A: \pi = 0$
$\pi \neq \pi_0$ (zwei-seitig)
$\pi > \pi_0$ (ein-seitig nach oben)
$\pi < \pi_0$ (ein-seitig nach unten)

3. Signifikanzniveau α:
Meistens $\alpha = 0{,}05$ oder $\alpha = 0{,}01$

4. Verwerfungsbereich K:

$K = [0, c_u] \cup [c_o, n]$ falls $H_A: \pi \neq \pi_0$,
$K = [c, n]$ falls $H_A: \pi > \pi_0$,
$K = [0, c]$ falls $H_A: \pi < \pi_0$.

grenzen mit TI:
TI.stat.binomcdf(n, π)
→ gibt alle Werte für x≤0, x≤1, x≤2, ...
TI.stat.binompdf(n, π)
→ gibt alle Werte für x=0, x=1, x=2, ...

3. Testentscheid:

$x \in K \rightarrow H_0$ *verwerfen* $\quad$ x *nicht* $\in K \rightarrow H_0$ *behalten*

Bemerkungen:

		Entscheidung	
		H_0	H_A
Wahrheit	H_0	*Kein Fehler*	*Fehler 1. Art*
	H_A	*Fehler 2. Art*	*Kein Fehler*

Signifikanzniveau $\alpha = P(Fehler\ 1.\ Art)$

Macht $= 1 - P(Fehler\ 2.\ Art)$ $\quad P(\text{Fehler 2. Art}) = 1 - P_{H_A}(X \in K_{H_0})$
Vorgehen: 1. Bestimme Verwerfungsbereich K mit H_0 $\hat{=}$ 1 - wahrsch. in K_{H_0} zu landen mit H_A
2. Macht $= P(X \epsilon K)$
wobei X mit echten Parameter verteilt ist
Bem: die Macht ist groesser bei einseitigen Test als bei zweiseitigen!

P-Wert:
ist das kleinste Signifikanzniveau, bei dem die Nullhypothese H_0 (gerade noch) verworfen wird

Falls P-Wert > α → H_0 behalten
Falls P-Wert < α → H_0 verwerfen

Bem:
der Testentscheid beruht auf dem Widerspruchs-Prinzip:
die Null-Hypothese kann nur falsifiziert und nicht verifiziert werden.

Vertrauensintervall durch Normalapproximation für Binomialverteilung:

Nur **Falls n gross**, kann eine solce Approximation gemacht werden:
Faustregel um zu Überprüfen ob Normalaprox. gut ist: $n\pi > 5$ und $n(1-\pi) > 5$

$$I = \frac{x}{n} \pm \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{x}{n}\left(1 - \frac{x}{n}\right)\frac{1}{n}}$$ Vertrauenintervall für π

für $\alpha = 0.05$: $I = \frac{x}{n} \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{x}{n}\left(1 - \frac{x}{n}\right)\frac{1}{n}}$

$$I = n\pi_0 \pm \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt{n\pi_0(1 - \pi_0)}$$ Vertrauenintervall für gesamte erwartere Anzahl von Erfolgen

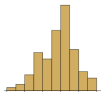
für $\alpha = 0.05$: $I = n\pi_0 \pm \sqrt{n\pi_0(1 - \pi_0)}$

Deskriptive Statistik:

Emp Quantil:
1. Daten nach grsse ordnen, aufsteigend
2. Man schreibt $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots$ wobei $x_{(1)} < x_{(2)}$

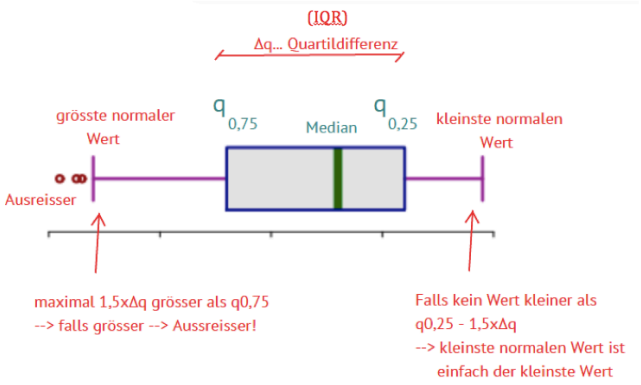
$$q_\alpha \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \left[x_{(\alpha \cdot n)} + x_{(\alpha \cdot n + 1)}\right], & \text{für } \alpha \cdot n \in \mathbb{N} \\ x_{(\alpha \cdot n)}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Histogramm:

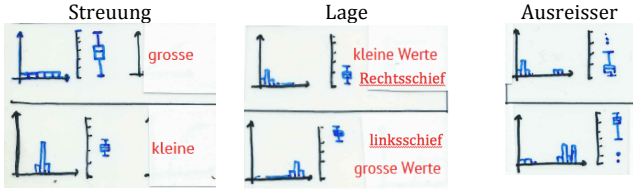


Faustregel:
Anzahl Klassen $= \lceil 1 + \log_2(n) \rceil$ *(aufrunden)*

Boxplot:



Hauptmerkmale zur Diskussion, bzw. zum Vergleich:



Stetige Verteilungen:

$$P(X = x) = 0 \text{ für alle } x \in W_x$$

W'keiten nur eines ganzen Bereiches bestimmbar!
$P(X \in (a, b]) = P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

$$P(X \leq x) = P(x < x), \quad da\ P(X = x) = 0$$

1. $f(x) \geq 0$ *für alle* $x \rightarrow F(x)$*monoton wachsend*
2. $P(a < X \leq b) = F(b) - f(a) = \int_a^b f(x)dx$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Kennzahlen:

$$\varepsilon(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \ ; \ Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \varepsilon(X)\right)^2 f(x)dx$$

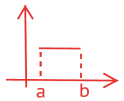
Quantile:
$P\left(X \leq q(\alpha)\right) = \alpha$
$F\left(q(\alpha)\right) = \alpha \Leftrightarrow q(\alpha) = F^{-1}(\alpha)$

Uniforme Verteilung:

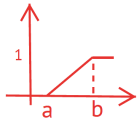
Tritt als Formalisierung der völligen "Ignoranz" auf

$$X \sim Uniform([a,b])$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{falls } a \le x \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{falls } a \le x \le b \\ 1 & \text{falls } x > b \end{cases}$$



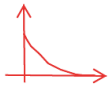
$$\mathcal{E}(X) = \frac{a+b}{2},$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma_X = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

Exponential-Verteilung:

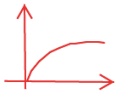
- Das einfachste Modell für Wartezeiten auf Ausfälle.
- Wenn die Zeiten zwischen den Ausfällen eines Systems $Exponential(\lambda)$- Verteilt sind, danni st die Anzahl Ausfälle in einem Intervall der Länge t Poisson(λt)-Veteilt

$$X \sim Exponential(\lambda)$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x), & \text{falls } x \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{falls } x \ge 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$



$$\mathcal{E}(X) = \frac{1}{\lambda},$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma_X = \frac{1}{\lambda}.$$

Normal-Verteilung:

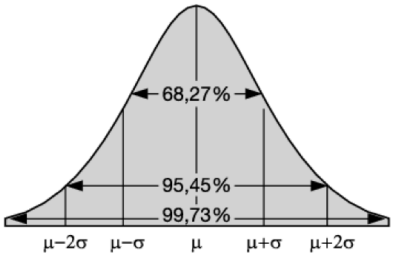
- häufigste Verteilung für Messwerte
- kumulative Verteilungsfunktion ist nicht explizit darstellbar

→ deshalb werden die Werte tabelliert (Standardnormalvert.)

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$\mathcal{E}(X) = \mu,$$
$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2, \quad \sigma_X = \sigma.$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

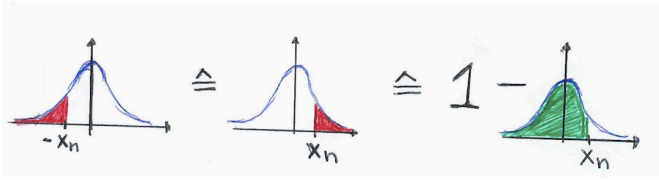


Vorgehen (1 oder 2):

1. geg: Stelle ; ges: W'keit
   → Stelle normieren $x_n = \frac{x-\mu}{\sigma}$
   → in Tabelle zugehörige W'keit nachschlagen
2. geg: W'keit ; ges: Stelle
   → zugehörigen normierten Quantil in Tabelle finden
   → Stelle disnormieren $x = x_n\sigma + \mu$

geom. Überlegungen aufgrund Symmetrie:

kann bei Benutztung von Integrationstabelle helfen!



Lineare Transformation:

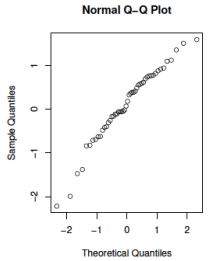
falls $Y = X + bZ$
$Var(Y) = VarX + b^2 Var(Z)$

Fur $Y = a + bX$ gilt dann:

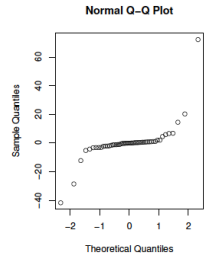
$$\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(a+bX) = a + b\,\mathcal{E}(X),$$
$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(a+bX) = b^2\,\mathrm{Var}(X), \quad \sigma_Y = |b|\sigma_X.$$

Überprüfung der Verteilung mit Q-Q Plot:

Die Idee ist die empirischen Quantile gegen die theoretischen Quantile der Modell-Verteilung zu plotten.
Wenn die Verteilung stimmt sollten diese Punkte ungefähr auf der Winkelhalbierende y=x liegen
(Normal Q-Q Plot überprüft ob die Daten normalverteilt sind)



✓ Daten passen zu Vert.



✗ Daten passen nicht zu Vert

Statistischen Test (stetig):

Summe von i.i.d Zufallsvariablen:

Bei Zufallsvariablen mit dieselbe Verteilung (mit Mittelwert μ und Standardabw. σ) und die unabhängig voneinander sind (indipendent, indentically distribiuted, i.i.d) wird die Standardabweichung und der Mittelwert deren Summe (μ_S und σ_S) folgenderweise bestimmt:

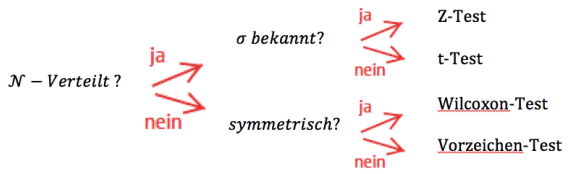
$\mu_S = n \cdot \mu$ und $\sigma_S = \sqrt{n} \cdot \sigma$, wobei n die Anzahl i.i.d Zufallsvariablen in der Summe beschreibt.

Artm. Mittel von i.i.d Zufallsvariablen:

Bei Zufallsvariablen mit dieselbe Verteilung (mit Mittelwert μ und Standardabw. σ) und die unabhängig voneinander sind (indipendent, indentically distribiuted, i.i.d) wird die Standardabweichung und der Mittelwert deren arithm. Mittel ($\bar{\mu}$ und $\bar{\sigma}$) folgenderweise bestimmt:

$\bar{\mu} = \mu$ und $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, wobei n die Anzahl i.i.d Zufallsvariablen beschreibt.

Welchen Test muss ich durchführen?



Der Z-Test (bei σ bekannt):

1. **Modell:** X_i ist eine kontinuierliche Messgrösse;
   $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma_X^2), \sigma_X$ bekannt
2. **Nullhypothese:** $H_0: \ \mu = \mu_0$,
   Alternative: $H_A: \ \mu \neq \mu_0$ (oder "<" oder ">")
3. **Teststatistik:**

$$Z = \frac{(\overline{X}_n - \mu_0)}{\sigma_{\overline{X}_n}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu_0)}{\sigma_X} = \frac{\text{beobachtet} - \text{erwartet}}{\text{Standardfehler}}.$$

   Verteilung der Teststatistik unter H_0: $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

4. **Signifikanzniveau:** α
5. **Verwerfungsbereich für die Teststatistik:**

$$\begin{aligned} K = &\ (-\infty, -\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})] \cup [\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}), \infty) \text{ bei } H_A: \ \mu \neq \mu_0, \\ K = &\ (-\infty, -\Phi^{-1}(1-\alpha)] \quad \text{bei } H_A: \ \mu < \mu_0, \\ K = &\ [\Phi^{-1}(1-\alpha), \infty) \quad \text{bei } H_A: \ \mu > \mu_0. \end{aligned}$$

6. **Testentscheid:** Überprüfe, ob der beobachtete Wert der Teststatistik im Verwerfungsbereich liegt.

Vertrauensintervall für μ:

zweiseitig	einseitig	
$\left[\mu_0 \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$	Falls $H_A: \mu < \mu_0$	Falls $H_A: \mu > \mu_0$
	$\left(-\infty; \mu_0 + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$	$\left[\mu_0 - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \infty\right)$

Auf Tabelle nachsehen

Der t-Test (bei σ unbekannt):

Schätzung von Mittelwert und Varianz:

$$\overline{x} = \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum x_i \qquad \hat{\sigma} = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \hat{\mu}) \quad (= \overline{x})$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \overline{x})^2$$

1. **Modell:** X_i ist eine kontinuierliche Messgrösse;
   $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma_X^2), \sigma_X$ wird durch $\widehat{\sigma_X}$ geschätzt
2. **Nullhypothese:** $H_0: \ \mu = \mu_0$,
   Alternative: $H_A: \ \mu \neq \mu_0$ (oder "<" oder ">")
3. **Teststatistik:**

$$T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu_0)}{\widehat{\sigma_X}} = \frac{\text{beobachtet} - \text{erwartet}}{\text{geschätzter Standardfehler}}.$$

   Verteilung der Teststatistik unter H_0: $T \sim \ t_{n-1}$

4. **Signifikanzniveau:** α
5. **Verwerfungsbereich für die Teststatistik:**

$$\begin{aligned} K = &\ (-\infty, -t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}, \infty) \text{ bei } H_A: \ \mu \neq \mu_0, \\ K = &\ (-\infty, -t_{n-1;1-\alpha}] \quad \text{bei } H_A: \ \mu < \mu_0, \\ K = &\ [t_{n-1;1-\alpha}, \infty) \quad \text{bei } H_A: \ \mu > \mu_0. \end{aligned}$$

6. **Testentscheid:** Überprüfe, ob der beobachtete Wert der Teststatistik im Verwerfungsbereich liegt.

Vertrauensintervall für μ:

zweiseitig:

$$[\overline{x}_n - t_{n-1,1-\alpha/2}\,\frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + t_{n-1,1-\alpha/2}\,\frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}]$$

einseitig:

$$\text{Falls } H_A: \mu < \mu_0\text{: } (-\infty; \overline{x}_n + t_{n-1,1-\alpha} \cdot \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}]$$

$$\text{Falls } H_A: \mu > \mu_0\text{: } [\overline{x}_n - t_{n-1,1-\alpha} \cdot \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}; \infty)$$

Bem:
Für grosse n ist t_n ähnlich zu $\mathcal{N}(0,1)$: insbesondere strebt die t_n-Verteilung gegen die Standard-Normalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ falls $n \to \infty$.

Vorzeichen-Test:

Die einzelnen X_i müssen nicht Normalverteilt sein. Der Vorzeichentest testet Hypothesen über den Median der Verteilung von X_i, den wir hier mit μ bezeichnen; im Falle einer symmetrischen Verteilung ist $\mu = \mathcal{E}(X_i)$. Wenn μ der Median der Verteilung von X ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Realisierung von X grösser als μ ist genauso gross wie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Realisierung von X kleiner als μ ist. In anderen Worten: $P(X > \mu) = 0.5$. Der Vorzeichen-Test verwendet das folgendermassen:

1. **Modell:**

$$X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d. ,}$$

   wobei X_i eine beliebige Verteilung hat.

2. **Nullhypothese:** $H_0: \ \mu = \mu_0$, (μ ist der Median)
   Alternative: $H_A: \ \mu \neq \mu_0$ (oder einseitige Variante)
3. **Teststatistik:** V : Anzahl X_is mit $(X_i > \mu_0)$
   Verteilung der Teststatistik unter H_0: $V \sim \ \text{Bin}(n, \pi_0)$ mit $\pi_0 = 0.5$
4. **Signifikanzniveau:** α
5. **Verwerfungsbereich für die Teststatistik:** $K = [0, c_u] \cup [c_o, n]$ falls $H_A: \ \mu \neq \mu_0$, Die Grenzen c_u und c_o müssen mit der Binomialverteilung oder der Normalapproximation berechnet werden.
6. **Testentscheid:** Entscheide, ob der beobachtete Wert der Teststatistik im Verwerfungsbereich der Teststatistik liegt.

Der Wilcoxon-Test :

- Daten müssen nicht Normal-verteilt sein
- Daten werden besse ausgenützt als bei Vorzeichen-Test
- Vorraussetzung ist, dass die Verteilung der X_i stetig und symmetrisch ist bezüglich $\mu = \varepsilon(X_i)$
- ist in den allermeisten Fällen vorzuziehen: er hat in vielen Situationen oftmals wesentlich grössere Macht als der t- und als der Vorzeichen-Test, und selbst in den ungünstigten Fällen ist er nie viel schlechter

Test bei gepaarten Stichproben:

Es liegt eine **gepaarte Stichprobe** vor, wenn

- beide Versuchsbedingungen an derselben Versuchseinheit eingesetzt werden
- oder jeder Versuchseinheit aus der einen Gruppe genau eine Versuchseinheit aus der anderen Gruppe zugeordnet werden kann.

Beispiel:
Datensatz zu Blutplättchen-Aggregation, siehe Kapitel 4.2. Die Aggregation wurde für jede Person vor und nach dem Rauchen gemessen. Die Zuordnung aller Messungen in der Gruppe "vorher" zu den Messungen in der Gruppe "nachher" ist also eindeutig. Somit handelt es sich um gepaarte Stichproben.

Die Daten sind dann von der folgenden Struktur:

$$x_1, \ldots, x_n \text{ unter Versuchsbedingung 1,}$$
$$y_1, \ldots, y_n \text{ unter Versuchsbedingung 2.}$$

Notwendigerweise ist dann die Stichprobengrösse n für beide Versuchsbedingungen dieselbe. Zudem sind x_i und y_i abhängig, weil die Werte von der gleichen Versuchseinheit kommen.
Bei der Analyse von gepaarten Vergleichen arbeitet man mit den Differenzen innerhalb der Paare,

$$u_i = x_i - y_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

welche wir als Realisierungen von i.i.d. Zufallsvariablen $U_1, \ldots, U_n$ auffassen. Kein Unterschied zwischen den beiden Versuchsbedingungen heisst dann einfach $E[U_i] = 0$ (oder auch Median$(U_i) = 0$, je nach Test).

Meistens verwendet man **t-Test**:

→ Berechne Mittelwert und Standardabw. der Differenzen

$$\bar{\mu} = \frac{1}{n}\sum u_i \qquad \sigma_\mu = \frac{1}{n-1}\sum(u_i - \bar{\mu})$$

→ meistens: H_0: $\mu_0 = 0$ [keine Differenz]
H_A: $\mu > 0 \cup \mu < 0 \cup \mu \neq 0$

$$\rightarrow T = \frac{\bar{\mu} - \mu_0}{\frac{\sigma_\mu}{\sqrt{n}}}$$

Verwerfungsbereich für die Teststatistik:

$$\begin{aligned} K = &\ (-\infty, -t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}, \infty) \text{ bei } H_A: \ \mu \neq \mu_0, \\ K = &\ (-\infty, -t_{n-1;1-\alpha}] \quad \text{bei } H_A: \ \mu < \mu_0, \\ K = &\ [t_{n-1;1-\alpha}, \infty) \quad \text{bei } H_A: \ \mu > \mu_0. \end{aligned}$$

Test bei ungepaarten Stichproben (hier nur mit t-Test):

Es ist der Fall, wenn man ein Date aus einer Gruppe nicht einen Date aus der zweiten Gruppe eindeutig zuzuordnen kann.

Beispiel:
Datensatz zu latenter Schmelzwärme von Eis in Kapitel 4.2. Wir haben die Schmelzwärme mit zwei verschiedenen Methoden hintereinander gemessen. Jede Messung ist entweder mit Methode A oder mit Methode B, aber nicht mit beiden gleichzeitig gemacht worden. Es gibt also keinen eindeutigen Zusammenhang zwischen den Messungen der Methode A und den Messungen der Methode B. Daher sind die beiden Stichproben ungepaart.

anders wie bei gepaarten Test gilt meistens $n \neq m$, obwohl auch den Fall $n = m$ möglich ist!

1. **Modell:**

$$X_1, \ldots, X_n \text{ i.i.d.} \ \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2),$$
$$Y_1, \ldots, Y_m \text{ i.i.d.} \ \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2).$$

2. **Nullhypothese:**

$$H_0: \ \mu_X = \mu_Y.$$

Alternative:

$$\begin{aligned} &H_A: \ \mu_X \neq \mu_Y \ \text{(zweiseitig)} \\ \text{oder } &H_A: \ \mu_X > \mu_Y \ \text{(einseitig)} \\ \text{oder } &H_A: \ \mu_X < \mu_Y \ \text{(einseitig)} \end{aligned}$$

3. **Teststatistik:**

$$T = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{S_{pool}\sqrt{1/n + 1/m}}$$

wobei

$$\begin{aligned} S^2_{pool} &= \frac{1}{n+m-2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 + \sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y}_m)^2\right) = \\ &= \frac{1}{n+m-2}\left((n-1)\hat{\sigma}^2_x + (m-1)\hat{\sigma}^2_y\right). \end{aligned}$$

Verteilung der Teststatistik unter H_0: $T \ \sim \ t_{n+m-2}$.

4. **Signifikanzniveau:** α
5. **Verwerfungsbereich für die Teststatistik:**

$$\begin{aligned} (-\infty, -t_{n+m-2,1-\alpha/2}] \cup [t_{n+m-2,1-\alpha/2}, \infty) &\quad \text{bei Alternative } H_A: \mu_X \neq \mu_Y, \\ [t_{n+m-2,1-\alpha}, \infty) &\quad \text{bei Alternative } H_A: \mu_X > \mu_Y, \\ (-\infty, -t_{n+m-2,1-\alpha}] &\quad \text{bei Alternative } H_A: \mu_X < \mu_Y. \end{aligned}$$

6. **Testentscheid:** Entscheide, ob der beobachtete Wert der Teststatistik im Verwfungsbereich der Teststatistik liegt.

Bem:

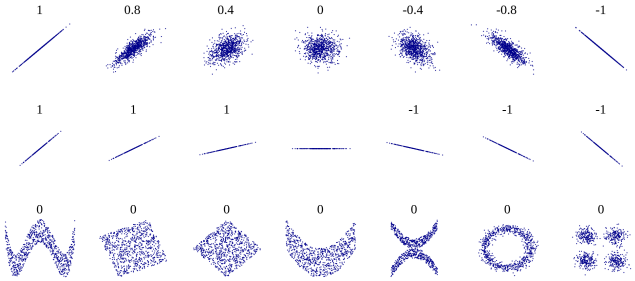
1) Falls $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ → $S_{pool} = \sigma$

2) Bei gepaarten Stichproben, kann man auch ein ungepaarten Test durchfuehren, aber die Macht wird kleiner als bei ein gepaarten Test!

Lineare Regression :

empirische Korrelation:
misst Stärke und Richtung der lineare Abhängigkeit zwischen X und Y:

$$\rho_{x,y} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum(y_i - \bar{y})^2}}$$



Einfache lineare Regression :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + E_i \ (i = 1, \ldots, n),$$
$$E_1, \ldots, E_n \text{ i.i.d.}, \ \mathcal{E}(E_i) = 0, \ \text{Var}(\mathcal{E}_i) = \sigma^2.$$

zufälliger Fehler: $E_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Parameterschätzung durch Methode der kleinsten Quadrate:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y}_n)(x_i - \bar{x}_n)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2} \\ \hat{\beta}_0 &= \bar{y}_n - \hat{\beta}_1 \bar{x}_n. \end{aligned}$$

Bem:

Lineare Modelle	**Nicht Lineare Modelle:** (Falls bei Ableitung kein Parameter verschwindet)
• $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + E_i$	• $y_i = \beta_0 \exp(\beta_1 x_i) + E_i$
• $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + E_i$	• $y_i = \log(\beta_0 + \beta_1 x_i + E_i)$
• $\log(y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i + E_i$	
• $\log(y_i) = \beta_0 + \beta_1 \log(x_i) + \beta_2 \sin(x_i^2) + E_i$	

Manchmal kann man ein nichtlinearisiertes Modell durch geschickte Transformation linearisieren!

Linearisierbar:
$y_i = \log(\beta_0 + \beta_1 x_i + E_i) \rightarrow \exp(y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i + E_i$

nicht Linearisierbar:
$y_i = \beta_0 \exp(\beta_1 x_i) + E_i$

Anhang:

Frage	Stichwort	Berechnung / Antwort
Welche Werte sind aufgrund der vorliegenden Daten plausibel für den Modellparameter θ?	**Vertrauensintervall** für θ	Alle Nullhypothesen, die nicht verworfen werden.
Liegt ein signifikantes Testresultat vor?	**Testentscheid**	Verwerfe die Nullhypothese, falls • Teststatistik liegt im Verwerfungsbereich • p-Wert ist kleiner als Signifikanzniveau • Vertrauensintervall enthält Nullhypothese nicht (alle äquivalent)
Wie wahrscheinlich ist es, dass wir ein signifikantes Testresultat erhalten, wenn H_0 stimmt?	**Fehler 1. Art**	Automatisch kontrolliert durch die Wahl des Signifikanzniveaus.
Wie wahrscheinlich ist es, dass wir kein signifikantes Testresultat erhalten, wenn H_0 nicht stimmt?	**Fehler 2. Art**	Berechne $\mathbb{P}_{\theta_A}(T \notin K)$ für ein $\theta_A \in H_A$. Der Parameter θ_A muss gewählt werden.
Wie wahrscheinlich ist es, dass wir ein signifikantes Testresultat erhalten, wenn H_0 nicht stimmt?	**Macht** $= 1 - \mathbb{P}$ (Fehler 2. Art)	Berechne $\mathbb{P}_{\theta_A}(T \in K)$ für ein $\theta_A \in H_A$. Der Parameter θ_A muss gewählt werden.
Ist ein signifikanter Effekt auch relevant?	**Relevanzbereich**	Betrachte, wie das Vertrauensintervall bzgl. dem Relevanzbereich liegt. Der Relevanzbereich wird durch Fachwissen festgelegt.

Tabelle 7.4: Typische Fragen im Zusammenhang mit statistischen Tests.

30 Messungen

$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i$ iid $N(0, \sigma^2)$

Residuals:

Min 1Q Median 3Q Max

Coeff.

	β_i Estimate	s.e.(β_i) Std. Error	t-value	Pr (>|t|)
(Intercept)				
x				
x^2				

Signf. codes: 0 ' xxx ...

Residual std.error: ... on ... degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.938 Adjusted R-Squared 0.934

F-Statistic: ... on ... and DF p-value: < 2·e-16

1) $\hat{\beta}_i = se(\hat{\beta}_i) \cdot t\text{-value}(\beta_i)$

2) $\sigma^2 = 0^2$

3) DoF (Degrees of freedom) = # Messungen − # β_i

4) VI von β_i => $[\beta_i - s.e.(\beta_i) \cdot t_{DOF,1-\frac{\alpha}{2}} \; , \; \beta_i + s.e.(\beta_i) \cdot t_{DOF,1-\frac{\alpha}{2}}]$

5) Vorhersageintervall beschreibt Bereich, in welchem der wahre Wert ist mit $1-\alpha$ wahrsch.

6) Vorhersageintervall > VI

7) H_0 verwerfen a) → VI von β_i umkehren zu K_i;
→ ist 0 in K? ja → verwerfen
nein → nicht verwerfen

b) → $K = [-\infty, -t_{DOF,1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{DOF,1-\frac{\alpha}{2}}]$

↳ ist t-value in K? Ja → verwerfen
nein → nicht verwerfen

c) → 9)

8) Lineares Modell, falls β_i in unveränderter Form ist, dann ist es Linear (nicht quadriert, logarithmiert, etc.)
→ Form von x ist völlig egal! ($\beta_1 x^{50}$ ist linear!)

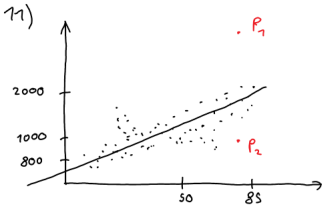
9) Pr(>|t|) = p-wert von t-value in Verteilung von β_i

$Pr(>|t|) > \alpha \rightarrow H_0$ nicht verwerfen

$Pr(>|t|) < \alpha \rightarrow H_0$ verwerfen

10) t-Teststatistik = t-value

11)



Neuer Punkt: $P_1(80, 3000)$
→ was passiert mit β_1 und σ^2?
β_0: achsenabschn.

β_1: Steigung

Neuer Punkt: $P_2(80, 1000)$

→ was passiert mit t-value?

$t\text{-value} = \frac{\beta_1}{s.e.(\beta_1)}$ (β_1 → unverändert; s.e.(β_1) → wird grösser) } → t-

12) $H_0: \beta_1 = 0$
$H_A: \beta_1 \neq 0$

→ immer zweiseitig (H_A)

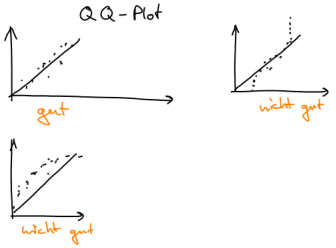
13) Wird Zielgrösse von x, x^2, z sign. beeinflusst?

< 0.05 → Ja

14) R^2 wird grösser falls noch eine Variable eingefügt wird.

Plots lesen

Norm. verteilt Annahme



15) y gegeben → x = ?

$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$

→ nach x umformen!

$x = \ldots$

Was ist der Fehler / Residuen?

Y, X gegeben

(f) $y = \ldots + \varepsilon_i$

$\varepsilon_i = ?$