Datum der Prüfung: 07.08.2019 **Basisprüfung** Bearbeitungszeit: 150 min

Diese Prüfung besteht aus 5 Aufgaben. Die maximal erreichbare Punktzahl ist 100 Punkte. Die Note 6.0 erreichen Sie mit mehr als 90 Punkten.

Bevor Sie beginnen:
Bitte tragen Sie Ihren Namen, Vornamen und Ihre Legi-Nummer sauber und lesbar in BLOCKSCHRIFT in die nachfolgende Tabelle ein.

Name	
Vorname	
Legi-Nr	

Hinweise:

- Bitte nummerieren Sie alle Ihre Lösungsblätter und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Vor- und Nachnamen.
- Teile der Lösungen müssen Sie direkt auf dem Aufgabenblatt eintragen. Geben Sie daher am Ende Ihre Lösungsblätter zusammen mit allen Aufgabenblättern ab.

Auf der Rückseite finden Sie die Liste der erlaubten Hilfsmittel sowie eine Liste mit numerischen Werten der physikalischen Konstanten.

Bewertungstabelle (Einträge nur von Lehrpersonen)

Frage:	Punkte:	Ergebnis:
Konzeptfragen	20	
Kaiserpinguine	20	
Dehnung eines Proteinmoleküls	20	
Strahlungsbilanz des Körpers	20	
Das Auge von Fischen	20	
Gesamtpunkte:	100	

Erlaubte Hilfsmittel:

- Zwei DIN A4 Blätter (4 Seiten) mit einer selbst verfassten Zusammenfassung.
- Taschenrechner ohne Kommunikationsschnittstellen.
- Wörterbuch für Fremdsprachige.

Numerische Werte physikalischer Konstanten:

Elementarladung	e	$1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Plancksche Konstante	h	$6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{Js}$
Lichtgeschwindigkeit	c	$2.998 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$
Boltzmann-Konstante	k_B	$1.381 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$
Erdbeschleunigung	g	$9.81\,\mathrm{m/s^2}$
Avogadro-Zahl	N_A	$6.022 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
Atomare Masseneinheit	u	$1.661 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Nullpunkt der absoluten Temperatur		$-273.15\,^\circ\mathrm{C} = 0\,\mathrm{K}$

Aufgabe 1: *Konzeptfragen* (20 Punkte)

Hinweis: Bei jeder der nachfolgenden Fragen müssen Sie genau eine Antwort ankreuzen.

(a) Zwei Körper der Massen m_1 und $m_2 = 2m_1$ beschleunigen eine reibungsfreie Rampe der Höhe h herunter. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- √ **Die Masse m_2 besitzt am Ende der Rampe eine höhere kinetische Energie als die Masse m_1.**
- ☐ Die Masse m_1 erreicht am Ende der Rampe eine höhere Endgeschwindigkeit als die Masse m_2.
- ☐ Beide Massen erfahren durch die Schwerkraft die selbe Arbeit beim herunterfahren.
- ☐ Die von der Schwerkraft aufgebrachte Arbeit der beiden Massen ist abhängig von der Neigung der Rampe.

(2 Punkte)

(b) Ein Bob fährt mit konstanter Geschwindigkeit v durch zwei Kurven, wobei die erste Kurve den Radius $r_{1.Kurve} = r$ und die zweite Kurve den Radius $r_{2.Kurve} = 2r$ hat. Welche Aussage über die Zentripetalbeschleunigung ist richtig?

- √ $a_{1.Kurve} = 2a_{2.Kurve}$
- ☐ $a_{1.Kurve} = a_{2.Kurve}$
- ☐ $a_{1.Kurve} = 1/2a_{2.Kurve}$
- ☐ $a_{1.Kurve} = 1/4a_{2.Kurve}$

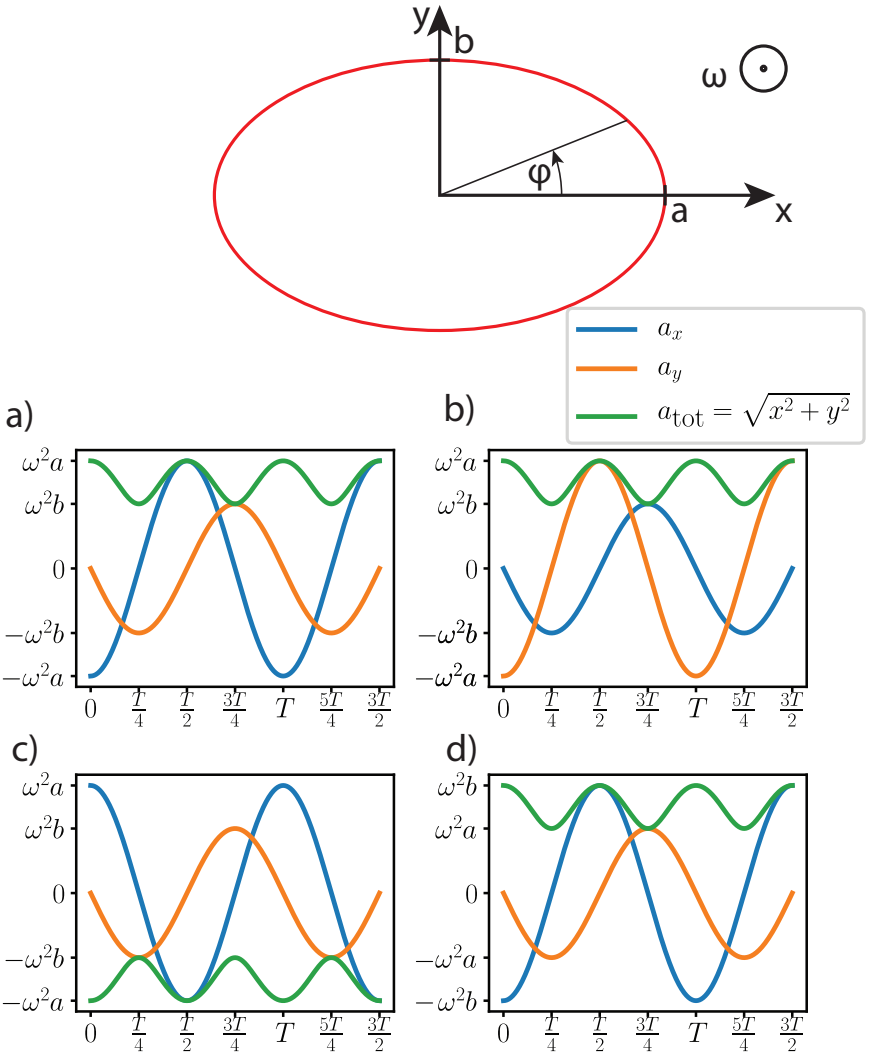
(2 Punkte)

(c) Welcher der nachfolgenden physikalischen Formeln kann nicht korrekt sein?

- ☐ $p(\dot{x}) = Z \exp\left(-\frac{m\dot{x}^2}{2k_\mathrm{B}T}\right)$
  p: Wahrscheinlichkeit, Z: Normierungskonstante, x: Position, m: Masse, k_B: Boltzmann-Konstante, T: Temperatur
- ☐ $S(N, K) = k_\mathrm{B} \ln\left(N!/[K!(N-K)!]\right)$
  S: Entropie, k_B: Boltzmann-Konstante, N und K: dimensionalose Grössen
- √ $a(t) = v_0 \frac{d}{dt}(1 - e^{-t})$
  a: Beschleunigung, v_0: Geschwindigkeit, t: Zeit
- ☐ $f = 2C/k_B$
  f: dimensionslose Konstante, C: Wärmekapazität, k_B: Boltzmann-Konstante

(2 Punkte)

(d) In der unten stehenden Abbildung ist eine Ellipse mit Seitenlängen a,b gezeichnet, wobei $a > b$. Wir betrachten nun ein Teilchen, das sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ auf dieser Ellipse bewegt. Zur Zeit $t = 0$ ist das Teilchen am Punkt $(a, 0)$. Welcher der untenstehenden Graphen zeigt den korrekten Verlauf der Beschleunigung $\vec{a}(t) = (a_x, a_y)$ und ihres Betrags $|\vec{a}|(t) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$?



√ **a**

☐ b

☐ c

☐ d

(2 Punkte)

(e) Bei der Schmetterlingsart der Seidenspinner sondert das Weibchen das Pherhormon Bombykol ab, um Männchen anzulocken. Zur Zeit $t = 0$ setzt es einen Puls mit einer Konzentration von $C = 1\mu$mol/l frei. Ein Männchen, welches $d = 75$ m entfernt ist, nimmt den Puls zur Zeit $t = 30$ s wahr. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- ☐ Die Pheromone haben sich vom weiblichen Seidenspinner ausgebreitet, bis sie den männlichen Seidenspinner erreicht haben. Am Ort des weiblichen Seidenspinners ist die Pheromonkonzentration am geringsten.
- ☐ Bis die Pheromone den männlichen Seidenspinner erreichen, ist die Konzentration der Pheromone in der Luft als Funktion des Abstands des weiblichen und des männlichen Tiers quasi konstant.
- ☐ Wenn der männliche Seidenspinner doppelt so weit entfernt ist, erreichen die Pheromone ihn erst nach der doppelten Zeit.
- √ **Wenn die Pheromone den männlichen Seidenspinner erreichen, ist die Konzentration von Pheromonen am Ort des weiblichen Seidenspinners am höchsten.**

(2 Punkte)

(f) Ein System befinde sich im Gleichgewicht mit einem Wärmereservoir der Temperatur T. Die Wahrscheinlichkeit dass sich dieses System im mikroskopischen Zustand μ mit Energie E_μ befindet ist:

$$\text{prob}(\mu) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E_\mu}{k_B T}\right)$$

Wodurch ist Z festgelegt?

- √ **Z ist durch die Bedingung gegeben, dass sich das System mit Sicherheit** (prob = 1) **in einem der mikroskopischen Zustände μ befindet**
- ☐ Z ist durch das Integral $\int_0^{E_\mu} \exp\left(-\frac{E_\mu}{k_B T}\right)$ gegeben
- ☐ Z ist ein empirischer Wert, der experimentell bestimmt werden muss
- ☐ Mit den obigen Angaben lässt sich Z nicht bestimmen

(2 Punkte)

(g) Ein Lichtstrahl trifft unter einem Winkel α_1 zum Lot auf die Grenzfläche von Luft zu Wasser ($n_{Luft} < n_{Wasser}$). Was gilt für den Brechungswinkel α_2 im Wasser?

☐ $\alpha_1 = \alpha_2$

√ $\alpha_1 \geq \alpha_2$

☐ $\alpha_1 \leq \alpha_2$

☐ Kommt auf die Größe von α_1 an.

(2 Punkte)

(h) Für ein zwei-atomiges Gas im thermodynamischen Gleichgewicht...

☐ ist die Entropie minimal.

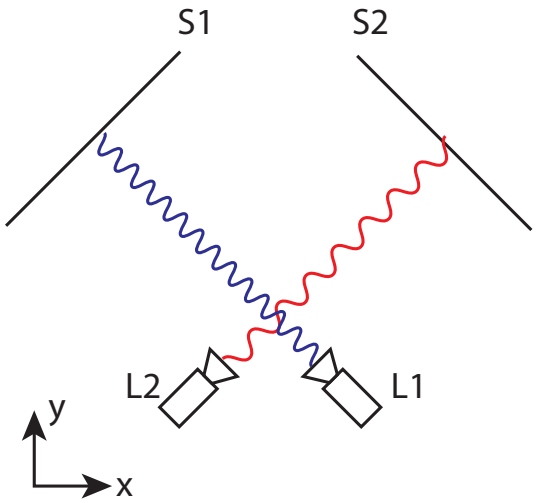
☐ nimmt die Wärmekapazität linear mit der Temperatur zu

☐ ist die Zahl der Mikrozustände minimal.

√ **nimmt die thermische Energie des Gases linear mit der Temperatur zu.**

(2 Punkte)

(i) Im unten gezeigten Aufbau befinden sich zwei Laser L1 und L2. Laser 1 sendet kurzwelliges blaues Licht mit einer Wellenlänge $\lambda_1 = 400\,\text{nm}$ aus. Laser 2 sendet langwelliges rotes Licht mit einer Wellenlänge von $\lambda_2 = 800\,\text{nm}$ aus. Das Laserlicht wird auf die Schirme S1 und S2 gerichtet. Ist nur jeweils einer der Laser in Betrieb, sieht man auf S1 blaues Licht und auf S2 rotes licht. Nun werden beide Laser gleichzeitig eingeschaltet. Beide Laserstrahlen haben die gleiche Intensität. Welche der Folgenden Antworten ist richtig?



√ **Da Photonen nicht miteinander wechselwirken ändert sich nichts. Auf S1 sieht man weiterhin nur blaues Licht mit der Wellenlänge $\lambda_1 = 400\,\text{nm}$ und auf S2 rotes Licht mit der Wellenlänge $\lambda_2 = 800\,\text{nm}$.**

☐ Die Photonen der beiden Laser stossen zusammen. Durch die Wechselwirkung verändert sich die Wellenlänge. Beide Photonen haben nun eine Wellenlänge von 600 nm, was der Farbe Orange entspricht.

☐ Die Photonen von Laser 1 und Laser 2 stossen zusammen. Da beide Laser die gleiche Intensität haben, löscht sich der Impuls der Photonen in x-Richtung aus. Das bedeutet, dass die Strahlen der beiden Laser in die Mitte zwischen S1 und S2 abgelenkt werden.

☐ Durch die Überlagerung der beiden Lichtstrahlen entseht auf S1 und S2 jeweils ein Interferenzmuster.

(2 Punkte)

(j) Ein Kolben ist mit einem idealen Gas gefüllt. Welche der folgenden Aussage ist korrekt:

☐ Wird die Temperatur bei konstantem Volumen und unveränderter Teilchenzahl von 20°C auf 40°C erhöht, halbiert sich der Druck innerhalb des Kolbens.

☐ Wird bei festem Volumen, fester Teilchenzahl und konstanter Temperatur das Gas innerhalb des Kolbens durch Gas mit höherer molarer Masse m ersetzt, erhöht sich der Druck innerhalb des Gefässes.

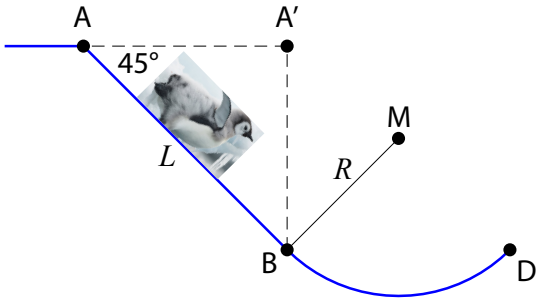
√ **Wird das Volumen das Kolbens bei konstanter Temperatur und konstanter Teilchenzahl verdoppelt, halbiert sich der Druck innerhalb des Kolbens.**

☐ Wird bei konstanten Volumen und konstantem Druck die Teilchezahl innerhalb des Kolbens verdoppelt, erhöht sich die Temperatur des Gases.

(2 Punkte)

Aufgabe 2: *Kaiserpinguine* (20 Punkte)

Junge Kaiserpinguine lernen bereits im Alter von wenigen Monaten zu schwimmen. Ein Spass besteht für die jungen Tiere darin, über eine Rutschbahn im Eis ins Wasser zu springen. In dieser Aufgabe beschreiben wir die Physik einer Rutschbahn, wie sie in der Skizze dargestellt ist.



Ein Pinguin der Masse m gleitet reibungsfrei die um $\phi = 45°$ geneigte Ebene der Länge L hinunter. Dabei startet er am Punkt A mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0. Am Punkt B geht die Ebene nahtlos und ohne Knick in eine Kreisbahn des Radius R (Kreismittelpunkt M) über.

(a) Wie gross ist die Komponente $\vec{F}_{\mathrm{H}}$ der Gravitationskraft $\vec{F}_{\mathrm{G}}$, die parallel zur geneigten Ebene wirkt (Hangabtriebskraft)? Drücken Sie den Betrag dieser Kraft als Vielfaches des Betrages $|\vec{F}_{\mathrm{G}}| = mg$ aus. **(1 Punkt)**

Lösung:

$$|\vec{F}_{\mathrm{H}}| = |\vec{F}_{\mathrm{G}}| \sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} mg. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

(b) Welche Geschwindigkeit hat der Pinguin am Punkt B? Wie schnell ist er am Punkt D, der auf gleicher Höhe liegt wie B? Geben Sie die Ergebnisse als Funktion von g, L, und v_0 an. **(4 Punkte)**

Lösung: Lösung (kinetisch):

$$v(t) = v_0 + \frac{\sqrt{2}}{2} gt, \quad s(t) = v_0 t + \frac{\sqrt{2}}{4} gt^2 = L. \textbf{ [1 Punkt]}$$

Aus der zweiten Gleichung bestimmen wir die Zeit t:

$$\frac{\sqrt{2}}{4} gt^2 + v_0 t - L = 0 \Rightarrow t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + \sqrt{2} gL}}{\sqrt{2} g/2}. \textbf{ [1 Punkt]}$$

Einsetzten in die erste Gleichung ergibt die Geschwindigkeit am Punkt B

$$v(L) = v_0 - v_0 + \sqrt{v_0^2 + \sqrt{2} gL} = \sqrt{v_0^2 + \sqrt{2} gL} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Lösung (energetisch): Der Pinguin verliert die potentielle Energie

$$\Delta E_{\text{pot}} = mg\frac{\sqrt{2}}{2}L \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

und gewinnt dabei dieselbe kinetische Energie. Die kinetische Energie zu Anfang ist

$$E_{\text{kin}}^{(\text{A})} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Im Punkt B ist die gesamte kinetische Energie demnach

$$E_{\text{kin}}^{(\text{B})} = \frac{1}{2}mv^2(L) = \frac{1}{2}m(v_0^2 + \sqrt{2}gL). \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Damit ist die Geschwindigkeit am Punkt B

$$v(L) = \sqrt{v_0^2 + \sqrt{2}gL} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Am Punkt D ist er gleich schnell wie am Punkt B. **[1 Punkt]**

(c) Wie gross ist die Zunahme der kinetischen Energie ΔE_{P} des Pinguins zwischen den Punkten A und B im Vergleich zur Zunahme der kinetischen Energie ΔE_{O} eines gleich schweren Objekts, das vom Punkt A' zum Punkt B frei fällt? Begründen Sie Ihre Antwort (auch durch Rechnung möglich). **(4 Punkte)**

Lösung: Lösung (durch Rechnung): Kinetische Energie des Pinguins am Punkt B

$$E_{\text{P}}^{(\text{B})} = \frac{1}{2}mv^2(L) = \frac{1}{2}m(v_0^2 + \sqrt{2}gL) \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Kinetische Energie des Pinguins am Punkt A

$$E_{\text{P}}^{(\text{A})} = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Zunahme der kinetischen Energie des Pinguins zwischen A und B:

$$\Delta E_{\text{P}} = \frac{1}{2}m\sqrt{2}gL. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Zunahme der kinetischen Energie des Objekts zwischen A' und B:

$$\Delta E_{\text{O}} = mgh = mg\frac{\sqrt{2}}{2}L = \frac{1}{2}m\sqrt{2}gL = \Delta E_{\text{P}} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Lösung (durch Argumentation mit der Energieerhaltung): Der Verlust an potentieller Energie ist in beiden Fällen gleich. Weder der rutschende Pinguin, noch das fallende Objekt leisten andere Arbeit als Beschleunigungsarbeit, denn die Kraft auf die Unterlage ist senkrecht zum Weg. Daher ist die Zunahme der kinetischen

Energien in beiden Fällen gleich, und gegeben durch die Abnahme der potentiellen Energie. Daher ist

$$\Delta E_{\mathrm{P}} = \Delta E_{\mathrm{O}} = mg\frac{\sqrt{2}}{2}L. \quad \textbf{[4 Punkte]}$$

(d) Wie gross ist die maximale Zentripetalkraft, welche die Eisunterlage auf der Kreisbahn mit Radius R zwischen B und D aufbringen muss? Geben Sie das Ergebnis als Funktion von g, L, v_0, und R an. Zeichnen Sie den Punkt, an dem die Zentripetalkraft maximal ist, in die obige Skizze ein. **(5 Punkte)**

Lösung: Auf der Kreisbahn verliert der Pinguin vom Punkt B aus nochmal potentielle Energie bis zum Punkt C.

$$\Delta E_{\mathrm{pot}}^{(\mathrm{B,C})} = mg\left(R - \frac{\sqrt{2}}{2}R\right). \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Dort erreicht er daher die maximale Geschwindigkeit $v_{\max}$, die gegeben ist durch

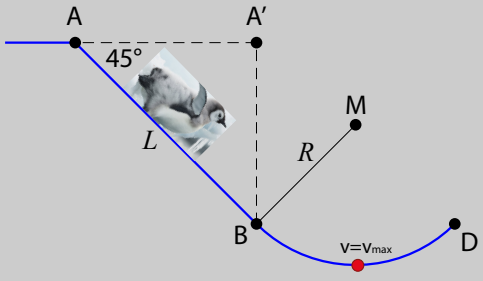
$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgL\frac{\sqrt{2}}{2} + mgR\frac{2-\sqrt{2}}{2}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Damit ist

$$v_{\max} = \sqrt{v_0^2 + gL\sqrt{2} + gR(2-\sqrt{2})}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Die nötige Zentripetalkraft ist daher

$$F_{\mathrm{Z}} = mR\omega^2 = \frac{mv_{\max}^2}{R} = m\left(\frac{v_0^2}{R} + g\frac{L}{R}\sqrt{2} + g(2-\sqrt{2})\right). \quad \textbf{[1 Punkt]}$$



[1 Punkt]

(e) Welche maximale Höhe h über dem Punkt D erreicht der Pinguin auf dem Parabelflug nach dem Abheben am Punkt D? Geben Sie das Ergebnis als Funktion von g, L und v_0 an. Welche Höhe erreicht er, wenn $v_0 = 0$? Wie vergleicht sich diese Höhe mit der Höhe des Punktes A? Welche kinetische Energie hat er am Punkt der maximalen Höhe (wiederum als Funktion von g, L und v_0)? **(6 Punkte)**

Lösung: Beim Abheben sind die Geschwindigkeitskomponenten (siehe zweite Teilaufgabe)

$$v_x = v_y = \frac{\sqrt{2}}{2} v(L) = \sqrt{\frac{v_0^2 + \sqrt{2}gL}{2}},$$

da der Absprungwinkel 45° ist [**1 Punkt**]. Die mit der y-Komponente der Geschwindigkeit verknüpfte Energie wird in potentielle Energie umgewandelt [**1 Punkt**], sodass

$$mgh = \frac{1}{2}mv_y^2 = \frac{1}{2}m\frac{v_0^2 + \sqrt{2}gL}{2} \Rightarrow h = \frac{v_0^2 + \sqrt{2}gL}{4g}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

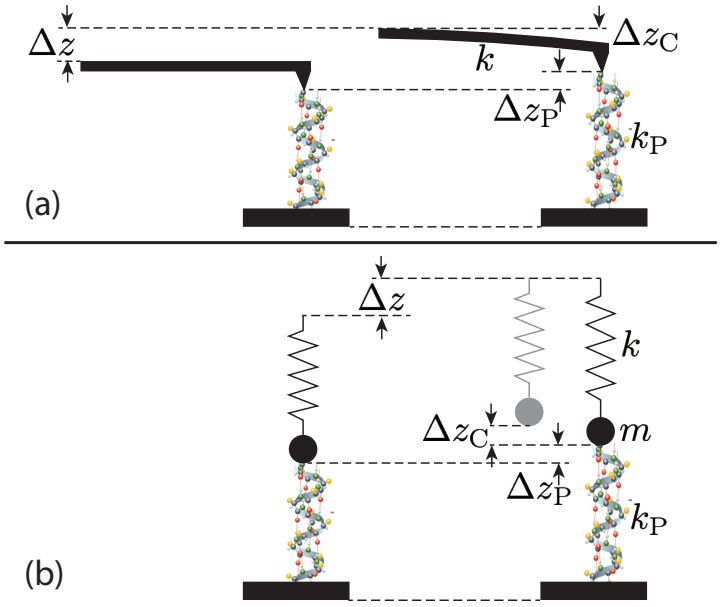
Für $v_0 = 0$ erreicht er nicht die Höhe des Punktes A, der auf der Höhe $\sqrt{2}L/2$ über D liegt, sondern nur die halbe Höhe bis A [**2 Punkte**]. Das liegt daran, dass die andere Hälfte der kinetischen Energie beim Absprung in die Horizontalbewegung geht (siehe unten).

Die kinetische Energie an diesem Punkt ist mit der x-Komponente der Geschwindigkeit verknüpft, die sich entlang der Flugparabel nicht ändert. Sie ist daher

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}m\frac{v_0^2 + \sqrt{2}gL}{2}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Aufgabe 3: *Dehnung eines Proteinmoleküls* (20 Punkte)

Sie dehnen mit einem Cantilever ein Proteinmolekül um dessen Federkonstante zu messen [siehe Abb. (a)]. Das Proteinmolekül wirkt effektiv als (masselose) Feder mit der Federkonstanten k_P, während der Cantilever wie eine Feder der Federkonstante k mit der Masse m wirkt [siehe Abb. (b)]. Das Experiment findet an Luft bei der Raumtemperatur T statt.



(a) Sie ziehen am Proteinmolekül mit der Kraft F, indem Sie den Cantilever um eine Strecke Δz zurückziehen. Um welche Strecke Δz_P dehnt sich dabei das Proteinmolekül, und um welche Strecke Δz_C verbiegt sich der Cantilever bei gegebener Kraft F? **(2 Punkte)**

Lösung: Das Proteinmolekül dehnt sich um

$$\Delta z_\mathrm{P} = \frac{F}{k_\mathrm{P}}, \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

der Cantilever verbiegt sich um

$$\Delta z_\mathrm{C} = \frac{F}{k}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

(b) Die Apparatur kann die Verschiebung Δz und die Verbiegung Δz_C des Cantilevers statisch messen. Wie gross ist die Federkonstante k_P als Funktion dieser gemessenen Grössen und der Federkonstante k des Cantilevers? **(4 Punkte)**

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\Delta z &= \Delta z_{\mathrm{P}} + \Delta z_{\mathrm{C}} \quad \textbf{[1 Punkt]} \\ &= \frac{F}{k_{\mathrm{P}}} + \Delta z_{\mathrm{C}} \quad \textbf{[1 Punkt]} \\ &= \frac{k\Delta z_{\mathrm{C}}}{k_{\mathrm{P}}} + \Delta z_{\mathrm{C}}. \quad \textbf{[1 Punkt]}\end{aligned}$$

und daher

$$k_{\mathrm{P}} = \frac{k\Delta z_{\mathrm{C}}}{\Delta z - \Delta z_{\mathrm{C}}} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

(c) Die Apparatur kann auch die Schwingungsfrequenz der Cantileverspitze [d.h. der Masse m in Abb. (b)] messen. Wie gross ist diese Frequenz in Abwesenheit des Proteinmoleküls (f_0) und mit dem Proteinmolekül (f)? Geben Sie die Federkonstante des Proteinmoleküls als Funktion der gemessenen Frequenzen f, f_0 und der Cantileverkonstanten k an. *Hinweis:* Wie gross ist die effektive Federkonstante des Systems mit Proteinmolekül? **(8 Punkte)**

Lösung: Ohne Proteinmolekül hat die Cantileverspitze die Schwingungsfrequenz

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Mit Proteinmolekül ist die effektive Federkonstante (Serienschaltung von Federn)

$$k_{\mathrm{eff}} = \left(\frac{1}{k_{\mathrm{P}}} + \frac{1}{k}\right)^{-1}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Damit ist

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{\mathrm{eff}}}{m}}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Zur Bestimmung von k_{P} bilden wir

$$\frac{f_0^2}{f^2} = \frac{k}{k_{\mathrm{eff}}} = k\left(\frac{1}{k_{\mathrm{P}}} + \frac{1}{k}\right) \quad \textbf{[3 Punkte]}$$

Daraus ergibt sich

$$k_{\mathrm{P}} = \frac{kf^2}{f_0^2 - f^2}. \quad \textbf{[2 Punkte]}$$

(d) Das Messsystem ist genau genug, um die thermische Auslenkung $\langle \Delta z^2 \rangle$ der Cantileverspitze zu messen. Wie gross ist diese Auslenkung, die aufgrund der Stösse mit den Luftmolekülen zustandekommt, mit ($\langle \Delta z_{\mathrm{P}}^2 \rangle$) und ohne ($\langle \Delta z_0^2 \rangle$) Proteinmolekül? Wie gross ist k_{P} als Funktion dieser beiden Messgrössen bei bekanntem k? **(6 Punkte)**

Lösung: Das schwingende System ist ein harmonischer Oszillator und hat daher zwei Freiheitsgrade (Impuls- und Ortskoordinate). Gemäss dem Gleichverteilungssatz trägt jeder Freiheitsgrad die thermische Energie $k_\mathrm{B}T/2$. Daher ist die mittlere Energie im Freiheitsgrad der Ortskoordinate

$$\frac{1}{2}k_\mathrm{eff}\langle\Delta z_\mathrm{P}^2\rangle = \frac{1}{2}k_\mathrm{B}T \textbf{ [1 Punkt]} \Rightarrow \langle z_\mathrm{P}^2\rangle = \frac{k_\mathrm{B}T}{k_\mathrm{eff}} \textbf{ [1 Punkt]}$$

und analog

$$\langle z_0^2\rangle = \frac{k_\mathrm{B}T}{k}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Zur Bestimmung von k_P bilden wir

$$\frac{\langle\Delta z_\mathrm{P}^2\rangle}{\langle\Delta z_0^2\rangle} = \frac{k}{k_\mathrm{eff}} = k\left(\frac{1}{k_\mathrm{P}} + \frac{1}{k}\right).$$

Daraus ergibt sich

$$k_\mathrm{P} = \frac{k\langle\Delta z_0^2\rangle}{\langle\Delta z_\mathrm{P}^2\rangle - \langle\Delta z_0^2\rangle} \quad \textbf{[3 Punkte]}$$

Aufgabe 4: *Strahlungsbilanz des Körpers* (20 Punkte)

Ein Mensch mit $A = 1.73\,\mathrm{m}^2$ Hautfläche und einer Hauttemperatur $T_\mathrm{H} = 36.8\,^\circ\mathrm{C}$ befindet sich in einem Raum der Temperatur $T_\mathrm{R} = 22\,^\circ\mathrm{C}$. Nehmen Sie in dieser Aufgabe die Hauttemperatur T_H stets als konstant über die gesamte Hautfläche A an. Berechnen Sie in allen Teilaufgaben das Ergebnis symbolisch und setzen Sie jeweils erst dann Zahlenwerte ein.

(a) Welche Leistung P_M strahlt der Mensch als elektromagnetische Wärmestrahlung ab, wenn man seine Haut als idealen schwarzen Körper annimmt? **(2 Punkte)**

Lösung: Nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz ist die Strahlungsleistung P eines idealen schwarzen Körpers der Fläche A und Temperatur T gegeben durch

$$P = \sigma A T^4 \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

mit

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_\mathrm{B}^4}{14 h^3 c^2} = 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2K^4}$$

Somit ist die gesamte Strahlungsleistung des Menschen

$$P_\mathrm{M} = \sigma A T_\mathrm{H}^4 = 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2K^4} \times 1.73\,\mathrm{m}^2 \times (309.95\,\mathrm{K})^4 = 905.3\,\mathrm{W}.$$

[1 Punkt]

(b) Welche Strahlungsleistung P_R nimmt der Mensch vom Raum auf, wenn die Wärmestrahlung auf der Haut vollständig absorbiert wird? **(1 Punkt)**

Lösung: Die Strahlungsleistung, die der Mensch aufnimmt, ist

$$\begin{aligned} P_R &= \sigma A T_\mathrm{R}^4 \\ &= 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2K^4} \times 1.73\,\mathrm{m}^2 \times (295.15\,\mathrm{K})^4 = 744.4\,\mathrm{W}. \quad \textbf{[1 Punkt]} \end{aligned}$$

(c) Wie hoch ist der resultierende Leistungsverlust ΔP des Menschen durch Wärmestrahlung, wenn Sie die Ergebnisse von (a) und (b) berücksichtigen? Welcher Energiemenge entspricht das pro Tag? Geben Sie das Ergebnis in Einheiten von Joule pro Tag und auch in Einheiten von Kilocalorien (kcal) pro Tag an. *Hinweis:* $1\,\mathrm{kcal} = 4189.7\,\mathrm{J}$. **(3 Punkte)**

Lösung: Der Leistungsverlust ist

$$\Delta P = P_\mathrm{M} - P_\mathrm{R} = 160.9\,\mathrm{W}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Der Energieverlust pro Tag ist

$$\Delta P = 160.9\,\mathrm{J/s} \times 3600\,\mathrm{s/h} \times 24\,\mathrm{h/d} = 1.39 \times 10^7\,\mathrm{J/d} \quad \textbf{[1 Punkt]}.$$

Umgerechnet in kcal sind das

$$\Delta P = \frac{1.39 \times 10^7\,\mathrm{J/d}}{4189.7\,\mathrm{J/kcal}} = 3318\,\mathrm{kcal/d}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

(d) Bei welcher Wellenlänge $\lambda_{\max}$ liegt das Maximum der vom Menschen abgestrahlten thermischen Strahlungsleistung? Welcher Frequenz $f_{\max}$ entspricht diese Wellenlänge? **(4 Punkte)**

Lösung: Nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz ist die Strahlungsleistung des Menschen maximal bei der Wellenlänge

$$\lambda_{\max} = \frac{2897.8\,\mu\mathrm{mK}}{T_{\mathrm{M}}}, \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

sodass

$$\lambda_{\max} = \frac{2897.8\,\mu\mathrm{mK}}{309.95\,\mathrm{K}} = 9.35\,\mu\mathrm{m}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Die Frequenz ist damit

$$\begin{aligned} f_{\max} &= \frac{c}{\lambda_{\max}} \quad \textbf{[1 Punkt]} \\ &= \frac{3\times10^{8}\,\mathrm{m/s}}{9.35\,\mu\mathrm{m}} = 3.21\times10^{13}\,\mathrm{Hz}. \quad \textbf{[1 Punkt]} \end{aligned}$$

(e) Der Mensch stellt sich in die Sonne, sodass ein Bruchteil x seiner Hautfläche A zusätzlich von der Sonne beschienen wird. Nehmen Sie an, dass die gesamte Strahlungsleistung der auftreffenden Sonnenstrahlung $P_{\mathrm{abs}}(x)$ absorbiert wird. Wie groß ist die absorbierte Strahlungsleistung als Funktion von x?
Hinweis: Die Temperatur der Sonne ist $T_{\mathrm{S}} = 6000\,\mathrm{K}$. Der Radius der Sonne ist $R_{\mathrm{S}} = 6.957\times10^{8}\,\mathrm{m}$. Der Abstand zwischen der Sonne und der Erde ist $L_{\mathrm{SE}} = 1.496\times10^{11}\,\mathrm{m}$. **(5 Punkte)**

Lösung: Zuerst wird der Bruchteil P_{abs} der gesamten Strahlungsleistung P_{S} der Sonne bestimmt, die auf den Menschen trifft:

$$P_{\mathrm{abs}} = P_{\mathrm{S}}\frac{xA}{4\pi L_{\mathrm{SE}}^2}. \quad \textbf{[2 Punkte]}$$

Die von der Sonne in den gesamten Raumwinkel abgegebene Strahlungsleistung ist

$$P_{\mathrm{S}} = \sigma 4\pi R_{\mathrm{S}}^2 T_{\mathrm{S}}^4. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Damit ergibt sich für die absorbierte Strahlungsleistung

$$P_{\mathrm{abs}} = \sigma 4\pi R_{\mathrm{S}}^2 T_{\mathrm{S}}^4 \times \frac{xA}{4\pi L_{\mathrm{SE}}^2} = \sigma T_{\mathrm{S}}^4 \times \frac{R_{\mathrm{S}}^2}{L_{\mathrm{SE}}^2} \times xA. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{abs}} &= 5.670\times10^{-8}\,\mathrm{W/m^2K^4}(6000\,\mathrm{K})^4 \times \left(\frac{6.957\times10^{8}\,\mathrm{m}}{1.496\times10^{11}\,\mathrm{m}}\right)^2 \times 1.73\,\mathrm{m}^2 \times x \\ &= 2749\,\mathrm{W}\times x. \quad \textbf{[1 Punkt]} \end{aligned}$$

(f) Wie gross muss x sein, damit die gesamte abgegebene Strahlungsleistung die von der Sonne und dem umgebenden Raum aufgenommene Strahlungsleistung genau aufwiegt? *Hinweis: kombinieren Sie Ihre Ergebnisse aus den Teilaufgaben (c) und (e).* **(2 Punkte)**

Lösung: Die zusätzlich von der Sonne absorbierte Strahlungsleistung soll das Wärmestrahlungsdefizit von 160.9 W aus Teilaufgabe (c) ausgleichen. Es ergibt sich

$$\Delta P = P_{\text{abs}} = 2749\,\text{W} \times x \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$x = \frac{160.9\,\text{W}}{2749\,\text{W}} = 0.059 = 5.9\%. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

(g) Berechnen Sie die Entropieänderung pro Zeit ($\Delta S/\Delta t$), die durch die Absorption der Sonnenstrahlung aus Teilaufgabe (f) im Körper entsteht. **(3 Punkte)**

Lösung: Wir starten von der Beziehung

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T_{\text{H}}} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Dann ist

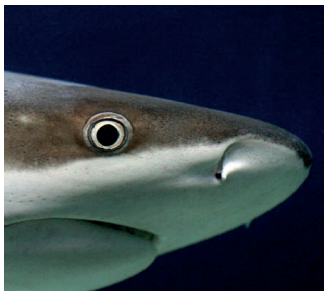
$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta Q/\Delta t}{T_{\text{H}}} = \frac{\Delta P}{T_{\text{H}}} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

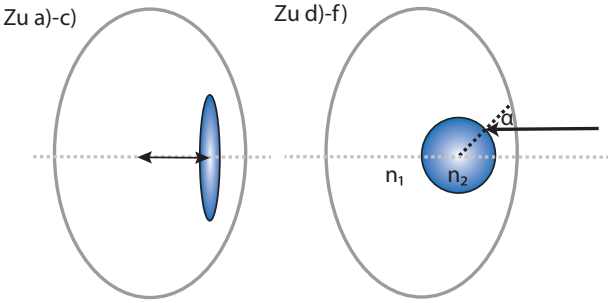
Das Einsetzen von Zahlen ergibt

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = 0.52\,\text{J/Ks}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Aufgabe 5: *Das Auge von Fischen* (20 Punkte)

Bei einer Reihe von Fischen wird die Akkomodation nicht durch eine Veränderung der Linsenkrümmung (Veränderung der Brennweite) erreicht, sondern durch eine Veränderung des Abstandes zwischen Linse und Netzhaut. Mit Bändern und Muskeln kann z.B. ein Hai die Position der Linse variieren. Die Linse des Haiauges hat die Brennweite $f = 7\,\text{mm}$. Er betrachtet zunächst ein Blatt einer Seeanemone, das 20 mm von der Linse entfernt ist.





(a) Berechnen Sie die Bildweite. Gehen Sie davon aus, dass die Linse im Haiauge in guter Näherung eine dünne Linse ist (siehe Abbildung zu a)-c)). Wie gross ist der Abstand zwischen Netzhaut und Linse? **(3 Punkte)**

Lösung: Berechnung der Gegenstandsweite:

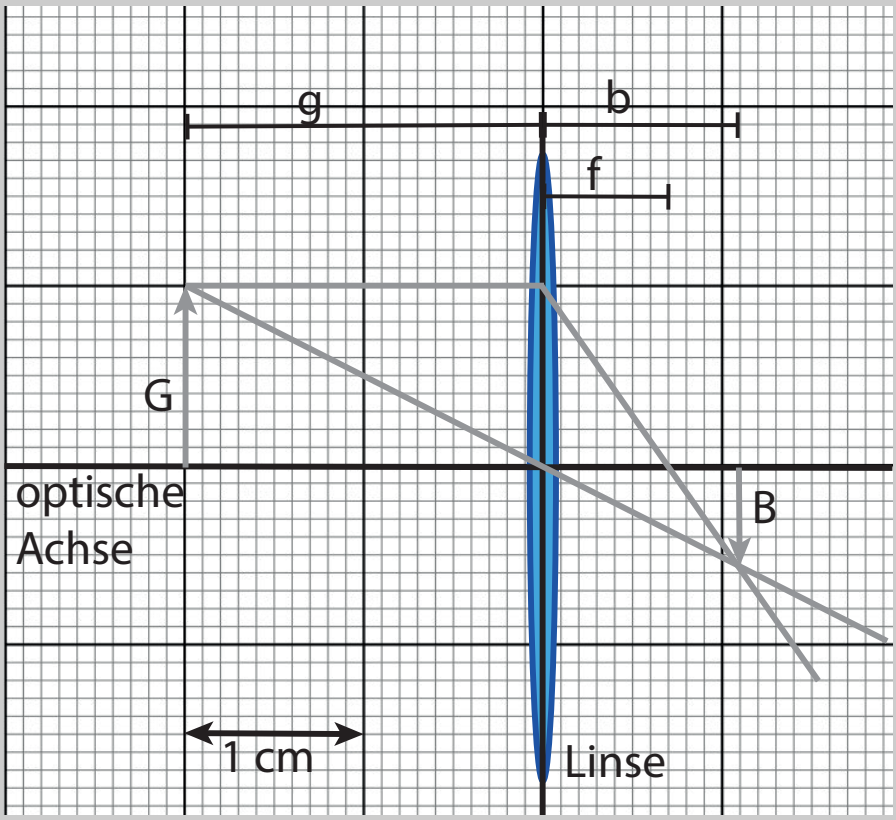
$$\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}} \textbf{ [1 Punkt]} \approx 11\,\text{mm}. \textbf{ [1 Punkt]}$$

Der Abstand zwischen Linse und Netzhaut entspricht der Bildweite also 11 mm.

(b) Fertigen Sie eine maßstabsgetreue Skizze an (siehe Skala) und konstruieren Sie das Bild mit dem Strahlengang. Hierbei kann die Seeanemone als Punkt gezeichnet werden. Beschriften Sie die unterschiedlichen Elemente in der Zeichnung mit b Bildweise, g Gegenstandweite, f Brennweite, G Gegenstand, B Bild, Linse und optische Achse. Ist das Bild reell oder virtuell? **(6 Punkte)**

Lösung:



(6 Punkte)

(c) Nun betrachtet der Hai einen Fisch, der sich (von seinem Auge aus betrachtet) in einem Abstand von 1 m hinter dem Blatt befindet. Wie weit muss er die Linse verschieben, um den Fisch auf der Netzhaut scharf abzubilden? **(6 Punkte)**

Lösung: Es gilt wiederum die Linsengleichung

$$\frac{1}{b_\mathrm{F}} + \frac{1}{g_\mathrm{F}} = \frac{1}{f}. \tag{1}$$

Zudem ist der Abstand zwischen Netzhaut und Fisch

$$g_\mathrm{F} + b_\mathrm{F} = d_\mathrm{F-B} + g + b, \quad \textbf{[1 Punkt]} \tag{2}$$

wobei $d_\mathrm{F-B} = 1\,\mathrm{m}$ der Abstand zwischen Blatt und Fisch ist. Wir finden die Bildweite g_F aus den Gln. (1) und (2), indem wir die Unbekannte g_F eliminieren. Das ergibt

$$\frac{1}{b_\mathrm{F}} + \frac{1}{d_\mathrm{F-B} + g + b - b_\mathrm{F}} = \frac{1}{f}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Das Ziel ist nun nach b_F aufzulösen. Mit $c := d_\mathrm{F-B} + g + b = 1031\,\mathrm{mm}$ schreiben wir

$$\frac{1}{b_\mathrm{F}} + \frac{1}{c - b_\mathrm{F}} = \frac{1}{f}$$

$$\Rightarrow \frac{c - b_\mathrm{F} + b_\mathrm{F}}{b_\mathrm{F}(c - b_\mathrm{F})} = \frac{c}{b_\mathrm{F}(c - b_\mathrm{F})} = \frac{1}{f}$$

$$\Rightarrow b_{\mathrm{F}}(c - b_{\mathrm{F}}) - cf = 0$$

$$\Rightarrow b_{\mathrm{F}}^2 - cb_{\mathrm{F}} + cf = 0$$

$$\Rightarrow b_{\mathrm{F}} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4cf}}{2}. \quad \textbf{[2 Punkte]}$$

Setzen wir Zahlen ein, finden wir

$$b_{\mathrm{F}} = 7.0\,\mathrm{mm}, \quad \textbf{[1 Punkte]}$$

was genau der Brennweite der Linse entspricht. Dieses Ergebnis ist plausibel, weil der betrachtete Gegenstand wesentlich weiter von der Linse entfernt ist, als die Brennweite. Der Haifisch muss seine Linse daher gegenüber $b = 11\,\mathrm{mm}$ um $4\,\mathrm{mm}$ verschieben, damit der Brennpunkt praktisch auf der Netzhaut liegt. **[1 Punkt]**

(d) Bei einem anderen Raubfisch kann die Linse des Auges näherungsweise als Kugel angenommen werden, deren Mittelpunkt auf der optischen Achse liegt (siehe Abbildung zu d)-f)). Die Brechzahl zwischen Linse und Glaskörper ist $N = n_2/n_1 = 1.66$, wobei n_2 der Brechungsindex der Linse und n_1 der des Glaskörpers ist. Ein Lichtstrahl, der parallel zur optischen Achse gerichtet ist, trifft auf die Linse unter dem Winkel $\alpha = 10°$ zum Einfallslot auf der Linsenoberfläche.

1. Wie gross ist der Winkel α' zwischen dem gebrochenen Lichtstrahl innerhalb der Linse und dem Einfallslot?
2. Wie gross ist der Winkel θ zwischen dem gebrochenen Lichtstrahl innerhalb der Linse und der optischen Achse?
3. Fertigen Sie eine saubere Skizze von der Anordnung, in die Sie die relevanten Winkel α, α' und θ einzeichnen.

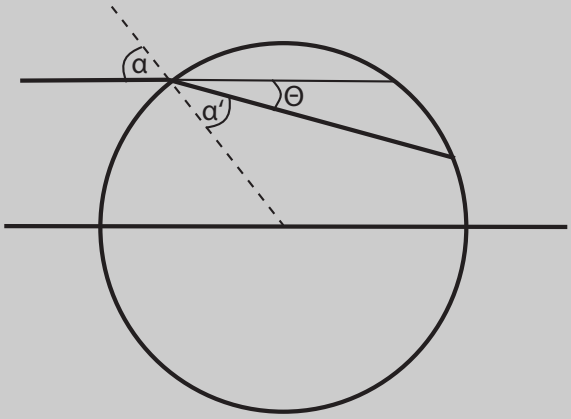
(3 Punkte)

Lösung: Berechnung des Winkels α' mit dem Brechungsgesetz

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\alpha'$$

$$\sin\alpha' = \frac{n_1 \sin\alpha}{n_2} = \frac{\sin\alpha}{N}. \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\Rightarrow \alpha' = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{N}\right) = 6° \quad \textbf{[1 Punkt]}$$



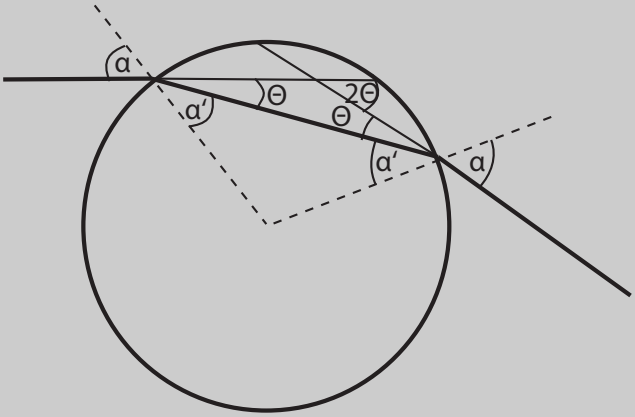
[1 Punkt]

(e) Nach weiterer Propagation verlässt der Lichtstrahl die kugelförmige Linse wieder.

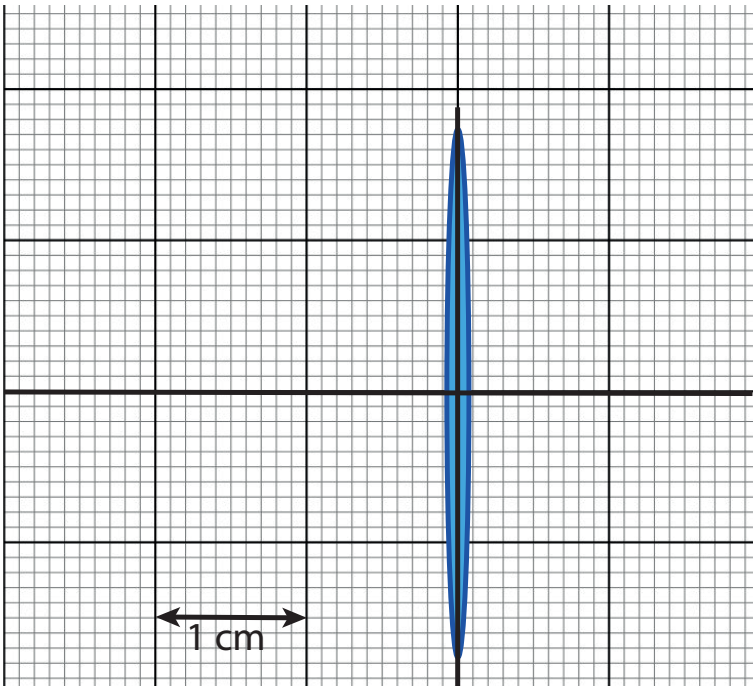
1. Wie groß ist der Winkel α'' des austretenden Strahls zum Lot auf die Kugeloberfläche am Austrittspunkt?
2. Wie gross ist der Winkel θ' zwischen dem eintretenden und dem austretenden Strahl? *Hinweis:* Fertigen Sie eine Skizze und beachten Sie die Symmetrie der Anordnung.

(2 Punkte)

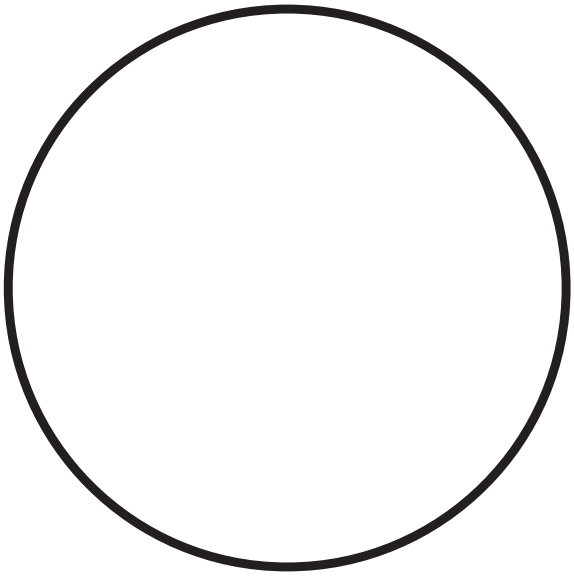
Lösung: Aus Symmetriegründen: $\alpha'' = \alpha$ **[1 Punkt]** und $\theta' = 2\theta$ **[1 Punkt]**



zu (b)

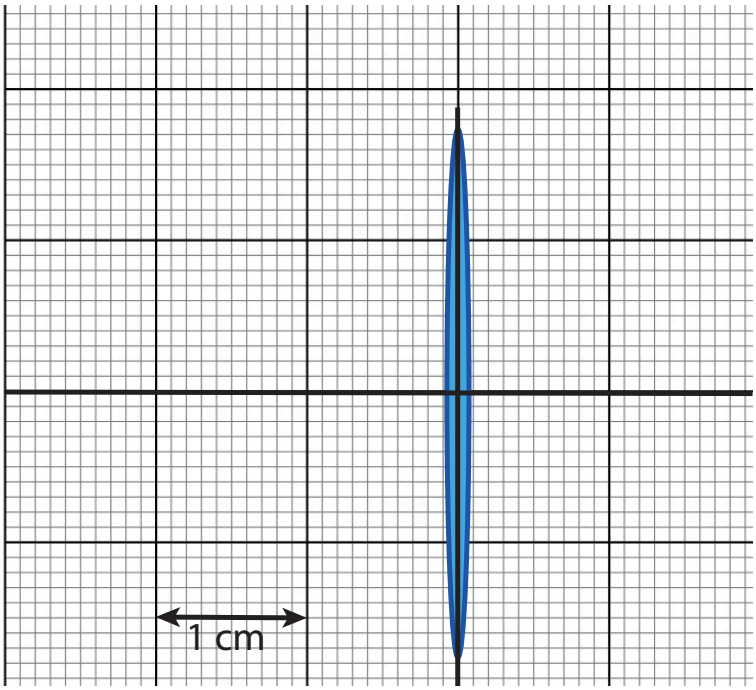


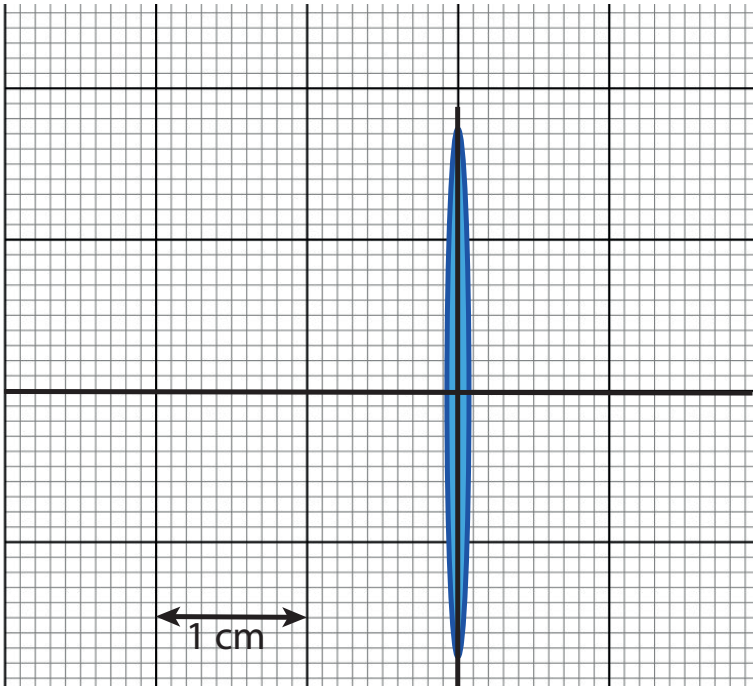
zu (d)



Beiblatt zu Aufgabe 5 (Reserve).

Hier können Sie Ihre graphische Lösung zur Teilaufgabe 5(b) konstruieren, falls Sie einen zweiten Anlauf brauchen. Falls Sie auf mehreren Blättern gezeichnet oder geschrieben haben, umkreisen Sie die Überschrift ("Beiblatt...") der Zeichnung, die korrigiert und benotet werden soll.



Beiblatt zu Aufgabe 5 (Reserve).

Hier können Sie Ihre graphische Lösung zur Teilaufgabe 5(b) konstruieren, falls Sie einen zweiten Anlauf brauchen. Falls Sie auf mehreren Blättern gezeichnet oder geschrieben haben, umkreisen Sie die Überschrift ("Beiblatt...") der Zeichnung, die korrigiert und benotet werden soll.